

Una nueva expresión acerca del producto de convolución de la derivada de orden k de la delta de Dirac en $|x|^2 - m^2$. *

M. Aguirre.

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 16-Marzo-2010; aceptado/accepted: 16-Mayo-2010)

RESUMEN

En este artículo se obtiene una expansión en series (tipo Taylor) de la distribución $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$, la cual permite dar una nueva expresión para el producto de convolución de $\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(r)}(|x|^2 - m^2)\}$. Otras expresiones de este producto aparecen en ([5]).

Palabras claves: distribución, convolución, producto, delta de Dirac; teoría de distribuciones, AMS Subject Classification, 46F10, 46F12.

ABSTRACT

In this paper, we obtain a expansion in series (type Taylor) of distribution $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$, and give a new expression for the convolution product of $\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(r)}(|x|^2 - m^2)\}$. Other expressions of that product appear in ([5]).

Keywords: distribution, convolution, product, Dirac's delta function, theory of distributions, AMS Subject Classification, 46F10, 46F12.

*Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina

INTRODUCCIÓN

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto del espacio Euclideo n -dimensional R^n .

Consideremos las distribuciones $(|x|^2 - m^2)_+^\lambda$ y $(|x|^2 - m^2)_-^\lambda$ definidas por

$$(|x|^2 - m^2)_+^\lambda = \begin{cases} (|x|^2 - m^2)^\lambda & \text{si } |x|^2 - m^2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } |x|^2 - m^2 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

y

$$(|x|^2 - m^2)_-^\lambda = \begin{cases} -(|x|^2 - m^2)^\lambda & \text{if } |x|^2 - m^2 \leq 0 \\ 0 & \text{if } |x|^2 - m^2 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde m es un número real positivo y λ es un número complejo.

Las distribuciones $\delta^{(k)}(m^2 - |x|^2)$ y $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$ son definidas en ([5], página 341) en la siguiente forma:

$$\delta^{(k)}(m^2 - |x|^2) = \lim_{\alpha \rightarrow -k} \frac{(m^2 - |x|^2)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3)$$

y

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) = (-1)^k \lim_{\alpha \rightarrow -k} \frac{(m^2 - |x|^2)_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (4)$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (5)$$

y

$$\text{Res}_{\alpha=-k} \Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^k}{k!} \quad (6)$$

([4], página 344).

Por otra parte, en este artículo necesitamos la siguiente fórmula:

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j \geq 0} \frac{(-|x|^2)^{m^{2j}}}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j - k)} \text{ para } n \text{ par si } k < \frac{n}{2} \quad (7)$$

$$\{\mathcal{D}^{(k)}(|x|^2 - m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j \geq 0} \frac{(-|y|^2)^j m^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j - k)} \text{ para } n \text{ par si } k \geq \frac{n}{2} \quad (8)$$

([5], páginas 341-342).

Aquí el símbolo \wedge designa la transformada de Fourier:

$$\{f\}^\wedge = \int_{R^n} e^{<x, y>} f(x) dx \quad (9)$$

$$y < x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n.$$

Ahora usando la fórmula

$$\{\Delta^j \delta\}^\wedge = (-1)^j (|y|^2)^j \quad (10)$$

([2]), página 201), donde Δ^j es el laplaciano iterado j veces definido por

$$\Delta^j = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right\}^j \quad (11)$$

y

$$|y|^2 = y_1^2 + \dots y_n^2. \quad (12)$$

De (8) y (9), se tiene:

$$\{\mathcal{D}^{(k)}(|x|^2 - m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j \geq 0} \left\{ \frac{(m^2)^j \Delta^j \delta}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j - k)} \right\}^\wedge \quad (13)$$

$$\text{para } n \text{ par si } k < \frac{n}{2}$$

y

$$\{\mathcal{D}^{(k)}(|x|^2 - m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j \geq k - \frac{n}{2} + 1} \left\{ \frac{(m^2)^j \Delta^j \delta}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j - k)} \right\}^\wedge \quad (14)$$

$$\text{para } n \text{ par si } k \geq \frac{n}{2}.$$

De (13) y (14) se tiene,

$$\{\mathcal{D}^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} = \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j \geq 0} \left\{ \frac{(m^2)^j \Delta^j \delta}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j - k)} \right\} \quad (15)$$

$$\text{para } n \text{ par si } k < \frac{n}{2}$$

y

$$\{\mathcal{D}^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} = \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{l \geq k - \frac{n}{2} + 1} \left\{ \frac{(m^2)^l \Delta^{l - \frac{n}{2} + k + 1} \delta}{4^{\frac{l - \frac{n}{2} + k + 1}{2}} l! (l + k + 1 - \frac{n}{2})!} \right\} \quad (16)$$

$$\text{para } n \text{ par si } k \geq \frac{n}{2} + 1.$$

Las fórmulas (15) y (16) aparecen en ([5]), página 74, formula (21) y (22) respectivamente.

Haciendo $m^2 = 0$ en (15) y (16) y usando la propiedad $\Delta^0 \delta = \delta$, tenemos la siguiente fórmula:

$$\delta^{(\frac{n}{2}-1)}(|x|^2) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x) \text{ si } n \text{ es par,} \quad (17)$$

$$\delta^{(k)}(|x|^2) = \frac{(-1)^k \pi^{\frac{n}{2}}}{(k - \frac{n}{2} + 1)! 4^{k - \frac{n}{2} + 1}} \Delta^{k - \frac{n}{2} + 1} \delta \text{ si } n \text{ es par y } k \geq \frac{n}{2} + 1. \quad (18)$$

Usando que $\Delta^0 \delta = \delta$ tenemos la siguiente fórmula:

$$\delta^{(k)}(|x|^2) = \frac{(-1)^k \pi^{\frac{n}{2}}}{(k - \frac{n}{2} + 1)! 4^{k - \frac{n}{2} + 1}} \Delta^{k - \frac{n}{2} + 1} \delta \text{ si } n \text{ es par y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \quad (19)$$

donde $|x|^2 = x_1^2 + \dots x_n^2$.

La fórmula (9), aparece en ([5], página 74, fórmula 24).

En este artículo, obtenemos una expansión en series (tipo Taylor) de la distribución $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$ y se obtiene una nueva expresión para el producto de convolución de $\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(l)}(|x|^2 - m^2)\}$. Otras expresiones para el producto de convolución aparecen en ([5]).

EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN $\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(l)}(|x|^2 - m^2)\}$

En este párrafo el símbolo $*$ significa convolución.

Ahora, vamos a demostrar el siguiente lemma:

Lemma 1:

Sea n la dimensión par del espacio y k un entero no negativo entonces la siguiente fórmula es válida

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-m^2)^l}{l!} \delta^{(k+l)}(|x|^2) \quad (20)$$

La demostración del lemma 1 es consecuencia de la fórmula 16 y la fórmula 19. En efecto, haciendo $\nu = l - k + \frac{n}{2} - 1$ en (16) y usando (19) se obtiene

$$\begin{aligned} \{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} &= \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \geq 0} \frac{2^{\frac{n}{2}} (m^2)^\nu (-1)^{-k-\nu} (\nu - \frac{n}{2} + k + 1)! 4^{\nu - \frac{n}{2} + k + 1} \delta^{(k+\nu)}(|x|^2)}{4^{\nu - \frac{n}{2} + k + 1} \nu! (\nu - \frac{n}{2} + k + 1)!} = \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{(-m^2)^\nu}{\nu!} \delta^{(k+\nu)}(|x|^2). \end{aligned}$$

Lemma 2:

Sea n dimensión par del espacio, k, t enteros no negativos tales que $k \geq \frac{n}{2}$ y $t \geq \frac{n}{2}$ entonces la siguiente fórmula es válida

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2)\} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}}. \quad (21)$$

$$\frac{(k+t-n+2)!}{(k-\frac{n}{2}+1)(t-\frac{n}{2}+1)!} \delta^{(k+t-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2).$$

Se sabe que ([5], página 75), la siguiente fórmula es válida

$$\Delta^t \{\delta(x)\} \delta * \Delta^s \{\delta(x)\} = \Delta^{t+s} \{\delta(x)\} \quad (22)$$

para t y s enteros no negativos.

Ahora de (19) y usando (22) se tiene,

$$\begin{aligned} \delta^{(k)}(|x|^2) * \delta^{(t)}(|x|^2) &= \\ \frac{(-1)^{k+t} \pi^n}{4^{k+t-n+2} (k-\frac{n}{2}+1)(t-\frac{n}{2}+1)!} \left(\Delta^{k-\frac{n}{2}+1} \{\delta(x)\} \delta * \Delta^{t-\frac{n}{2}+1} \{\delta(x)\} \right) &= \\ \frac{(-1)^{k+t} \pi^n}{4^{k+t-n+2} (k-\frac{n}{2}+1)(t-\frac{n}{2}+1)!} \Delta^{k+t-\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}+1} \{\delta(x)\} &= \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}} (k+t-n+2)!}{(k-\frac{n}{2}+1)(t-\frac{n}{2}+1)!} \Delta^{(k+t-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2) \end{aligned} \quad (23)$$

si $k \geq \frac{n}{2}-1$ y $t \geq \frac{n}{2}-1$.

De (23) se obtiene la fórmula (21).

Teorema:

Sea n la dimensión par del espacio, k, t enteros no negativos tales que $k \geq \frac{n}{2}$ y $t \geq \frac{n}{2}$ entonces la siguiente fórmula es válida

$$\delta^{(k)}(m^2 - |x|^2) * \delta^{(t)}(m^2 - |x|^2) = \sum_{p \geq 0} A_{r,t,n,p} \delta^{(k+t+p-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2) \quad (24)$$

donde

$$A_{r,t,n,p} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}} (k+t+p-n+2)!}{p! (k-\frac{n}{2}+p+1)! (t-\frac{n}{2}+p+1)!} \quad (25)$$

Demostración:

De (16) y considerando (23) se tiene,

$$\begin{aligned}
 & \delta^{(k)}(m^2 - |x|^2) * \delta^{(t)}(m^2 - |x|^2) = \\
 & \sum_{l \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{(-m^2)^{t+j}}{l!j!} \left[\delta^{(k+l)}(|x|^2) * \delta^{(t+j)}(|x|^2) \right] = \\
 & (-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{p \geq 0} \left(-\frac{m^2}{4}\right)^p (k+t+p-n+2)!. \\
 & \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!(p-j)!(k+p-j-\frac{n}{2}+1)!(t+j-\frac{n}{2}+1)!} \delta^{(k+t+p-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Usando la fórmula

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!(p-j)!(k+p-j-\frac{n}{2}+1)!(t+j-\frac{n}{2}+1)!} = \\
 & \frac{1}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!} \cdot \sum_{j=0}^p \binom{k-\frac{n}{2}+1+p}{j} \binom{t-\frac{n}{2}+1+p}{p-j} = \\
 & \frac{1}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!} \binom{k-\frac{n}{2}+1+t-\frac{n}{2}+1+2p}{p} = \\
 & \frac{(k+t-n+2p+2)!}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!} \cdot \frac{1}{p!(k+t-n+p+2)!},
 \end{aligned} \tag{27}$$

donde

$$\binom{t}{j} = \frac{t!}{j!(t-j)!}. \tag{28}$$

Reemplazando (27) en (26) se tiene,

$$\begin{aligned}
 & \{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2 - m^2)\} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}}. \\
 & \sum_{p \geq 0} \frac{(k+t-n+2p+2)!}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!} \frac{(-m^2)^p}{p!} \delta^{(k+t+p-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2)
 \end{aligned} \tag{29}$$

De (29) se concluye la demostración del teorema.

Es claro que haciendo $m^2 = 0$ en (24) bajo las condiciones $k \geq \frac{n}{2} - 1, t \geq \frac{n}{2} - 1$ y n par, se obtiene la fórmula (23).

REFERENCIAS

- [1] Aguirre M. (1997) *The distribution $\delta^{(k)}(P \pm i0)$* , Journal of Computational and Applied Math. (88) pp. 309-348, Elsevier, N.H.
- [2] L Gelfand, I. and Shilov, G. *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.
- [3] Schwartz, L. *Theorie the Distributions*, Herman, Paris, 1966.
- [4] Erdelchi, A. *Higher Transcendental Functions*, Vol. I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [5] Erdelchi Aguirre T. Manuel., *Distributional convolution product between the $k - th$ derivative of Dirac's delta in $|x|^2 - m^2$* , Integral Transforms and Special Functions, 2000, vol. 10, No. 1, pp. 71-80.



Manuel A. Aguirre, es Profesor y Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar